Programme de colle n°16

semaine du 26 au 30 janvier

Notions vues en cours

Chapitre 20 : Calcul matriciel (suite et fin)

- Anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$, matrice identité I_n, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est non commutatif si $n \geq 2$
- Matrice inversible, matrice inverse, notations A^{-1} et $GL_n(\mathbb{K})$, A est inversible ssi elle est inversible à gauche ssi elle est inversible à droite, formules $(A^{-1})^{-1} = A$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- Matrice transposée, notation $A^\top$, l'application $A \mapsto A^\top$ est involutive et linéaire, formule $(AB)^\top = B^\top A^\top$, formule $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$
- Matrice symétrique, matrice antisymétrique, notations $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls

Chapitre 21 : Systèmes linéaires

- Système linéaire : définition, coefficients, second membre, système homogène associé, système (in)compatible
- Matrice associée à un système, écriture matricielle, structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire
- Opération élémentaire sur les lignes (dilatation, permutation, transvection)
- Système équivalent, toute opération élémentaire transforme un système en un système équivalent
- Matrice échelonnée, matrice augmentée d'un système, pivot, algorithme du pivot de Gauss
- Matrice échelonnée réduite, variable pivot, variable libre, obtention de l'ensemble des solutions
- Calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot (avec une matrice augmentée ayant I_n à droite)
- CNS d'inversibilité des matrices diagonales / triangulaires, et forme des matrices inverses

Chapitre 22 : Polynômes (Partie A)

- Polynôme à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$, coefficients d'un polynôme, ensemble $\mathbb{K}[X]$, polynôme nul
- Degré d'un polynôme, notation $\deg P$ ou $\deg(P)$, convention $\deg 0 = -\infty$, on identifie les polynômes constants (degré négatif) à un élément de $\mathbb{K}$, identifications de deux polynômes
- Écriture dite développée : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, cela équivaut à $\deg P \leq n$, ensemble $\mathbb{K}_n[X]$; Si de plus $a_n \neq 0$, cela équivaut à $\deg P = n$; coefficient dominant d'un polynôme non nul, polynôme unitaire, monôme
- Opération $+$ et $\lambda\cdot$ sur $\mathbb{K}[X]$, degrés de $P+Q$ et de λP, $(\mathbb{K}[X],+)$ est un groupe abélien, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-groupe de $\mathbb{K}[X]$
- Opération $\times$ sur $\mathbb{K}[X]$, degré de PQ, si P et Q sont non nuls, alors le coefficient dominant de PQ est le produit de celui de P et de celui de Q
- $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est un anneau intègre (avec les conséquences que cela entraine), les inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes de degré 0,
- Puissance d'un polynôme, degré de P^n, formules $(A+B)^n$ et $A^n - B^n$ avec A et B deux polynômes

Les exercices porteront majoritairement sur les matrices et systèmes linéaires. La composition de polynômes est hors-programme cette semaine.

Les questions de cours sont en page suivante

Questions de cours

Question Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles ci-dessous, après les questions longues (chapitres **18 à 20**).

Question Longue. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.* ***Les énoncés des théroèmes doivent être clairement... énoncés !***

1. Transposée d'un produit matriciel et transposée de l'inverse Chapitre 20, Théorèmes 20.25 et 20.26
2. Linéarité de la transposée, définition de matrice symétrique et antisymétrique, montrer que les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls Chapitre 20, Théorème 20.24 assertion 2, Définition 20.27, Théorème 20.28
3. Degré de la somme de deux polynômes Chapitre 22, Théorème 22.10
4. Définition du produit de deux polynômes, degré du produit de deux polynômes Chapitre 22, Définition 22.12 et Théorème 22.13

Questions Flash au programme :

Chapitre 20 :

- Soit A, B des matrices de tailles respectives (n, p) et (p, q). Rappeler la formule qui exprime $\left[AB\right]_{ij}$ en fonction des coefficients de A et de B.
- Donner toutes les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Soit E^{ij} et $E^{k\ell}$ deux matrices élémentaires. Compléter la formule : $E^{ij}E^{k\ell} = \delta_{\cdots}E^{\cdots}$
- Quelle structure algébrique peut-on mettre sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$? et sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
- Donner la forme (avec des 0, des $*$...) d'une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Idem pour les matrices triangulaires supérieures et inférieures.
- Si A et B sont diagonales, que peut-on dire de AB ? peut-on dire la même chose pour des matrices triangulaires ?
- Rappeler la formule du binôme dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ainsi que la formule $A^m - B^m$.
- Que *suffit-il* de vérifier pour qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit inversible ?
- Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Quelle est la taille de $A^\top$? Exprimer $\left[A^\top\right]_{ij}$ en fonction des coefficients de A.
- Exprimer différemment $(AB)^\top$ et $(A^\top)^{-1}$.
- Rappeler la définition de matrice symétrique et de matrice antisymétrique.

Chapitre 19 :

- Soit $\top$ une l.c.i. sur E et $e \in E$. Que doit vérifier e pour être un élément neutre pour $\top$?
- Soit $\top$ une l.c.i. sur E et $x \in E$. Que doit vérifier x pour être symétrisable pour $\top$?
- Rappeler (éventuellement oralement) quelles sont les 4 propriétés à vérifier pour que $(G, \top)$ soit un groupe.
- Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $H \subset G$. Donner une caractérisation de "H est un sous-groupe de G".
- Soit $(G, \top)$ et $(G', \perp)$ deux groupes et $f : G \to G'$. Que doit vérifier f pour être un morphisme ? Puis oralement : un endomorphisme ? un isomorphisme ? un automorphisme ?
- Soit f un morphisme de groupes. Rappeler la définition et la notation du noyau de f. À quelle condition sur le noyau est-ce que f est injective ?
- Soit f un morphisme de groupes. Rappeler la définition et la notation de l'image de f. À quelle condition sur l'image est-ce que f est surjective ?

- Soit $(A,+,\times)$ un anneau. Donner une caractérisation de "B est un sous-anneau de A"
- Rappeler la formule du binôme dans un anneau.
- Soit $(A,+,\times)$ et $(A',+,\times)$ deux anneaux. Que doit vérifier $f : A \to A'$ pour être un morphisme d'anneaux ? Puis oralement : un endomorphisme ? un isomorphisme ? un automorphisme ?
- Si $(A,+,\times)$ est un anneau, quelle structure algébrique peut-on donner sur l'ensemble de ses éléments inversibles (noté $\mathrm{Inv}(A)$) ?
- Que doit vérifier un anneau $(A,+,\times)$ pour être un anneau intègre ?
- Que doit-on vérifier pour que $(\mathbb{K},+,\times)$ soit un corps ?

Chapitre 18 :

- Si $a \mid b$ et $b \mid a$, que peut-on dire sur a et b ?
- Rappeler le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ (avec toutes les hypothèses).
- Énoncer le théorème de Bézout-Bachet (aussi appelé relation de Bézout).
- Énoncer le théorème de Bézout.
- Si $a \mid bc$, peut-on dire que $a \mid c$? Sinon, quelle hypothèse doit-on rajouter ?
- Si $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$, peut-on dire que $a \wedge (bc) = 1$? Sinon, quelle hypothèse doit-on rajouter ?
- Si $a \mid c$ et $b \mid c$, peut-on dire que $ab \mid c$? Sinon, quelle hypothèse doit-on rajouter ?
- Soit $a, n \in \mathbb{Z}$. Que signifie "a est inversible modulo n" ? Sous quelle condition est-ce que cela est vérifié ?
- Donner une relation simple qui fait intervenir $a \wedge b$ et $a \vee b$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$.
- Énoncer le lemme d'Euclide.
- Donner la forme générale de la décomposition d'un entier n sous forme de facteurs premiers.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler une définition de la valuation $v_p(n)$ (deux définitions sont acceptées, cf 18.47).
- Donner une condition nécessaire et suffisante à $a \mid b$, qui fait intervenir les valuations $v_p(a)$ et $v_p(b)$. Et pour $a = b$?
- Compléter les formules suivantes : $v_p(ab) = \dots$ et $v_p(a \wedge b) = \dots$
- Énoncer le petit théorème de Fermat.